

2022학년도 경희고등학교 수학교과 수업 시강 및 면접 문항

[안내사항]

1. 시강과 면접은 15~20분 진행됩니다.
2. 수업 시강에는 [붙임1]과 [붙임2]를 이용하여 다음 사항을 중점적으로 진행해주시기 바랍니다.

1. $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 과 x 축 사이의 넓이 식의 유도
2. 넓이 개념을 이용한 [붙임2]의 문항 해설

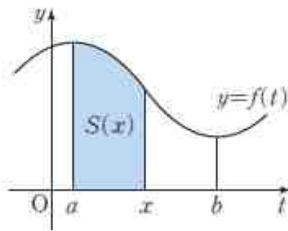
[붙임 1] 교과서 : 수학Ⅱ(동아출판)

[붙임 2] 관련 문항

[붙임 1] 교과서 : 수학 II(동아출판)

함수 $y=f(t)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(t) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(t)$ 와 t 축 및 두 직선 $t=a, t=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구해 보자.

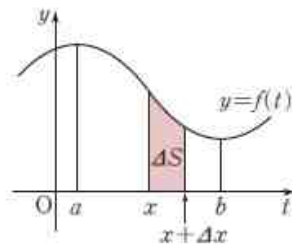
오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[a, b]$ 에 속하는 임의의 x 에 대하여 곡선 $y=f(t)$ 와 t 축 및 두 직선 $t=a, t=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$ 라고 하자. 그러면 $S(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에 속하는 모든 x 에서 정의된 x 의 함수이다.



이때 x 의 증분 Δx 에 대한 $S(x)$ 의 증분을 ΔS 라고 하면

$$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$$

이다.



(i) $\Delta x > 0$ 일 때

함수 $f(t)$ 는 닫힌구간 $[x, x + \Delta x]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

그 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라고 하면

$$m\Delta x \leq \Delta S \leq M\Delta x$$

이므로

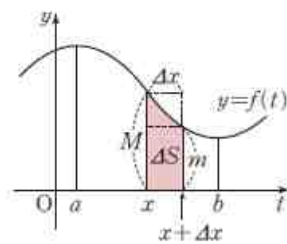
$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M$$

이다.

(ii) $\Delta x < 0$ 일 때에도 마찬가지로

$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M$$

이다.



함수 $f(t)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{이면 } m \rightarrow f(x) \text{ 이고 } M \rightarrow f(x)$$

이다. 따라서

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ 이면 } \frac{\Delta S}{\Delta x} \rightarrow f(x)$$

이다. 즉,

$$S'(x) = f(x)$$

이므로 $S(x)$ 는 x 의 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나이다.

이제 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$S(x) = F(x) + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이고, $S(x)$ 의 정의에 따라 $S(a) = 0$ 이므로

$$S(a) = F(a) + C = 0 \text{ 에서 } C = -F(a)$$

이다. 따라서

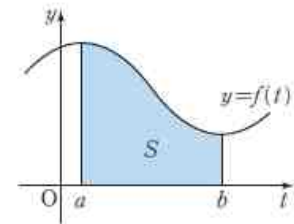
$$S(x) = F(x) - F(a)$$

이므로 곡선 $y=f(t)$ 와 t 축 및 두 직선 $t=a, t=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = S(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

이다.

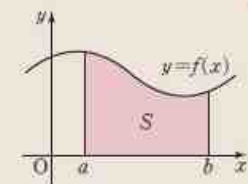
앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.



정적분과 넓이

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



[붙임 2] 관련 문항

※ 다음 문항은 학생들이 ‘정적분과 미분의 관계’ 개념을 배우며 풀었던 문항이다.
 본 차시 수업을 통해 배운 ‘넓이’ 개념을 이용해 아래 문항을 해결하시오.

[2020학년도 대학수학능력시험 수학(나) 20번]

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2} \{f(x) + f(1)\} \text{이다.}$$

(나) $\int_0^2 f(x)dx = 5 \int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0) = 1$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. (4점)